МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

М.И. Кузнецов
О.В. Любимцев
О.А. Муляр

Начала линейной алгебры. Часть 1

Учебно-методическое пособие

Рекомендован методической комиссией института ИИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям 01.03.01 «Математика»,
01.05.01 «Фундаментальные математика и механика», 01.03.03 «Механика
и математическое моделирование»

Нижний Новгород
2020

УДК 512.54
ББК 22.144
К-89

К-89 Кузнецов М.И., Любимцев О.В., Муляр О.А. НАЧАЛА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ЧАСТЬ 1: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 35 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор **Д.В. Баландин**

Предлагаемое учебно-методическое пособие содержит необходимые теоретические сведения и набор типовых задач по системам линейных уравнений и матричной алгебре. В основу положены материалы учебников и сборников задач, список которых приведен в конце пособия. Составлено в соответствии с программой курса алгебры, читаемого для студентов-математиков первого курса (первого семестра) института информационных технологий, математики и механики.

Пособие издано в рамках развития НИУ «Разработка новых и модернизация существующих образовательных ресурсов».

УДК 512.54
ББК 22.144

Содержание

1. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Рассмотрим произвольную систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где $a_{ij}, b_i \in K$; $i = 1, \ldots m$, $j = 1, \ldots n$; K — произвольное поле. *Решением* системы линейных уравнений (СЛУ) называется строка n элементов поля K $(k_1, \ldots, k_n)$, $k_j \in K$, такая, что при подстановке в i-е уравнение, $1 \leq i \leq m$, k_1 вместо x_1, k_2 вместо x_2,..., k_n вместо x_n получаем b_i (свободный член i-го уравнения), т.е. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}k_j = b_i$. Таким образом, строка $(k_1, \ldots, k_n)$ является решением, если значения $k_1, \ldots, k_n$ соответственно для $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют всем m уравнениям системы.

Через X обозначим совокупность всех решений СЛУ и заметим, что $X \subseteq K^n$ (т.е. совокупность всех решений является подмножеством в множестве K^n всех строк длины n элементов из поля K). Если $X \neq \emptyset$ (т.е. система имеет решение), то система называется *совместной*. Например, однородная система линейных уравнений (ОСЛУ) всегда имеет нулевое решение, $(0, \ldots, 0) \in X \subseteq K^n$. Если система имеет только одно решение ($|X| = 1$), то система называется *определённой*. Если $|X| > 1$, то совместная система называется *неопределённой*. Основная задача исследования систем линейных уравнений заключается в описании (нахождении) множества решений $X \subseteq K^n$ (в частности, определения, к какому типу принадлежит система: несовместная, определённая, неопределённая). Две системы линейных уравнений от *одного* набора $x_1, \ldots, x_n$ неизвестных и соответственно из m и p уравнений называются эквивалентными, если их множества решений X_I и X_{II} совпадают (т.е. подмножества X_I и X_{II} в K^n совпадают, $X_I = X_{II}$).

План алгоритма, предложенного Гауссом, был весьма прост:

1) применять к системе линейных уравнений последовательно преобразования, не меняющие множество решений (таким образом мы сохраняем множество решений исходной системы), и перейти к эквивалентной системе, имеющей «простой вид» (так называемую ступенчатую форму);

2) для «простого вида» системы (со ступенчатой матрицей) описать множество решений, которое совпадает с множеством решений исходной системы.

Определение 1.1. *(элементарное преобразование 1-го типа)*

При $i \neq k$ к i-му уравнению системы прибавляется k-е уравнение, умноженное на число $c \in K$ (обозначение: $(i)' = (i) + c(k)$, т.е. лишь одно i-е уравнение (i) заменяется на новое уравнение $(i)' = (i) + c(k)$). Новое i-е уравнение имеет вид

$$(a_{i1} + ca_{k1})x_1 + \ldots + (a_{in} + ca_{kn})x_n = b_i + cb_k.$$

Определение 1.2. (*элементарное преобразование 2-го типа*)

При $i \neq k$ i-е и k-е уравнения меняются местами, остальные уравнения не изменяются (обозначение: $(i)' = (k)$, $(k)' = (i)$; для коэффициентов это означает следующее: для $j = 1, \ldots, n$ имеем $a'_{ij} = a_{kj}$, $b'_i = b_k$, $a'_{kj} = a_{ij}$, $b'_k = b_i$).

Для удобства в конкретных вычислениях можно применять элементарное преобразование 3-го типа: i-е уравнение умножается на ненулевое число $0 \neq c \in K$, $(i)' = c(i)$. Имеет место следующая

Теорема 1.1. *После последовательного применения конечного числа элементарных преобразований 1-го или 2-го типа к системе линейных уравнений получается система линейных уравнений, эквивалентная первоначальной.*

Определение 1.3. Под *ступенчатой системой* линейных уравнений понимается система линейных уравнений со *ступенчатой матрицей* коэффициентов, т.е.:

1) все нулевые строки находятся в матрице ниже ненулевых строк;

2) если $(0, \ldots, a_{ik}, \ldots, a_{in})$, $a_{ik} \neq 0$ — первый ненулевой элемент в i-й строке (называемый лидером i-й строки), то $a_{rs} = 0$ для всех $i < r \leq m$, $1 \leq s \leq k$ (элементы $a_{rs} = 0$ для всех мест (r, s), расположенных в строчках, ниже i-й, и в столбцах $s = 1, 2, \ldots, k$). Другими словами, лидер строки с бо́льшим номером стоит строго правее.

Например, матрица

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ступенчатый вид (выделены лидеры строк). В тоже время, матрица

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не является ступенчатой (лидер третьей строки находится не строго правее, чем лидер второй строки).

Замечание. Свойство быть ступенчатой матрицей алгоритмически (с помощью компьютера) распознаваемо.

Теорема 1.2. *(алгоритм Гаусса). Всякую систему линейных уравнений конечным числом элементарных преобразований 1-го и 2-го типов можно привести к ступенчатому виду (т. е. к системе линейных уравнений, матрица коэффициентов которой является ступенчатой матрицей).*

Следствие 1.1. *Каждую матрицу элементарными преобразованиями строк* 1-го *и* 2-го *типа можно привести к ступенчатому виду.*

Заметим теперь, что однородная система линейных уравнений всегда совместна (нулевая строчка $(0, \ldots, 0) \in K^n$ является решением системы). Далее, если СЛУ содержит уравнение

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = b \neq 0$$

(назовём его «экзотическим» уравнением), то система несовместна. По ненулевой ступенчатой матрице переменные $x_1, \ldots, x_n$ разобьём на две группы: главные $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ir}$, «проходящие» через уголки ступенек (их r штук), и свободные — все остальные $n - r$ переменных (их может и не быть совсем при $r = n$).

Теорема 1.3. *(критерий совместности СЛУ по её ступенчатому виду).*

1) Система линейных уравнений $(a_{ij}|b_i)$ из m уравнений с неизвестными $x_1, \ldots x_n$ совместна тогда и только тогда, когда в её ступенчатом виде нет «экзотических» уравнений (т.е. или $r = m$, или $r < m$ и и свободные коэффициенты в уравнениях с $r+1$-го по m-е равны нулю).

2) Для совместной системы свободным неизвестным можно придавать произвольные значения, при этом главные неизвестные однозначно определяются (при заданных значениях свободных неизвестных), тем самым мы получаем все решения СЛУ.

Теорема 1.4. *(критерий определённости СЛУ по её ступенчатому виду).*

Система линейных уравнений является определённой тогда и только тогда, когда в её ступенчатом виде:

а) нет «экзотических» уравнений (критерий совместности);

б) $r = n$ (т.е. все неизвестные главные, другим словами — отсутствуют свободные неизвестные).

Следствие 1.2. *Над полем действительных чисел $K = \mathbb{R}$ (и над любым бесконечным полем) число решений системы линейных уравнений может быть равно 0 (несовместная система), 1 (определённая система) и ∞ (неопределённая система).*

Заметим при этом, что над конечным полем $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ из двух элементов система $x_1 + x_2 = 0$ имеет ровно два решения.

Пример 1.1.

Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Запишем матрицу коэффициентов (включая свободные):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-3). К третьей строке прибавим первую, умноженную на (-4). К четвертой строке прибавим первую, умноженную на (-1). Матрица примет вид:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Из третьей строки вычтем вторую, затем поделим вторую строку на (-2). Матрица примет вид:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Переставим третью и четвертую строки. В результате получим матрицу ступенчатого вида, которая соответствует СЛУ, эквивалентной исходной:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

В ступенчатом виде нет «экзотических» уравнений, следовательно, система совместна. По полученной ступенчатой матрице выпишем СЛУ и разобьём переменные на две группы: главные x_1, x_2, x_4, «проходящие» через уголки ступенек, и свободные x_3, x_5.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

Выразим x_1, x_2, x_4 через x_3 и x_5:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 + 3x_5 \\ x_2 = x_3 - 2x_5 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

Таким образом, множество решений имеет вид

$$X = \{(1 - x_3 + 3x_5, x_3 - 2x_5, x_3, -1, x_5) | x_3, x_5 \in \mathbf{R}\}.$$

Упражнения

1. Приведите с помощью элементарных преобразований строк данную матрицу с рациональными коэффициентами к ступенчатому виду:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 7 \\ 6 & -12 & -3 & 15 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -7 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & -8 & -3 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

2. Матрицы в) и г) приведите к ступенчатому виду:
а) над полем вычетов по модулю два;
б) над полем вычетов по модулю три.

3. Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

а)
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

д)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

е)

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$$

4. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

а)

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2. \end{cases}$$

5. Найти все векторы пространства $\mathbf{R}^n$, переходящие в вектор $b \in \mathbb{R}^m$ при линейном отображении $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, заданном матрицей A:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -9 \\ 5 & 2 & -8 \\ 8 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, $\qquad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -14 \\ 2 & -6 & -3 & -1 \\ 3 & -9 & -5 & -6 \end{pmatrix}$, $\qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$, $\qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Подстановки

Определение 2.1. *Подстановкой* степени n называется взаимно однозначное отображение множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$ на себя. Отображение $\varphi : M \to M$ можно рассматривать как бинарное отношение $\varphi \subseteq M \times M$, т.е. как некоторое множество упорядоченных пар, которое в данном случае удобно записывать следующим образом:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}.$$

В нижней строчке $(\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n))$, поскольку φ — биекция, встречаются все элементы i, $1 \le i \le n$, при этом только по одному разу. Такие строчки элементов $(i_1, \dots, i_n)$, $1 \le i_j \le n$, где каждый элемент i_j, $1 \le i_j \le n$ встречается один и только один раз, называются *перестановками* элементов $1, 2, \dots, n$.

Множество всех подстановок множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$ образуют группу S_n относительно произведения отображений (иногда называемой *симметрической группой*). При этом в S_n для $n \ge 3$ имеем

$$(12)(13) = (132) \ne (123) = (13)(12),$$

следовательно, группа S_n и любая группа S_n при $n \ge 3$ некоммутативны.

Пусть $1 \le i_1, \dots, i_k \le n$ — различные натуральные числа. Подстановка $\varphi \in S_n$ называется *циклом*, если $\varphi(i_1) = i_2, \varphi(i_2) = i_3, \dots, \varphi(i_k) = i_1$, а на остальных числах φ действует тождественно, т.е. $\varphi(j) = j$. Цикл φ обозначается $(i_1, \dots, i_k)$, число k называется длиной цикла φ, множество $\{i_1, \dots, i_k\}$ называется орбитой цикла φ. Два цикла называются независимыми, если пересечение их орбит пусто. Любую подстановку можно представить в виде произведения попарно независимых циклов.

Будем говорить, что числа i и j в перестановке $(\dots, i, \dots, j, \dots)$ образуют инверсию, если число i расположено левее, чем j, но $i > j$. Чётность подстановки $\left(\begin{smallmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{smallmatrix}\right)$ определяется как чётность суммы числа инверсий в верхней строчке и числа инверсий в нижней строчке. Для определения четности произведения можно воспользоваться следующей таблицей:

σ	τ	$\sigma\tau$
ч	ч	ч
н	ч	н
ч	н	н
н	н	ч

Рассмотрим отображение $\varepsilon : S_n \to \{-1, 1\}$,

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ — четная подстановка;} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ — нечетная подстановка.} \end{cases}$$

Лемма 2.1. *Если σ, $\tau \in S_n$, то:*

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$$

(т.е. $\sigma : S_n \to \{1, -1\}$ — гомоморфизм групп);

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1}).$$

Лемма 2.2. *Если $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ — разложение подстановки $\sigma \in S_n$ в произведение транспозиций $\tau_1, \dots, \tau_k$, то $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$.*

Теорема 2.1. *Чётные подстановки A_n являются группой (подгруппой в группе подстановок S_n); $|A_n| = \dfrac{n!}{2}$ при $n \geq 2$.*

Пример 2.1.

Пусть

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 1 & 2 & 4 & 7 & 5 & 3 & 6 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 1 & 6 & 10 & 2 & 4 & 9 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

Требуется найти $(\delta\sigma)^{100}$.

Сначала находим

$$\delta\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 9 & 7 & 10 & 8 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (5\ 8)(1\ 4\ 10\ 3\ 7\ 6\ 2\ 9)$$

(разложение в произведение циклов с непересекающимися орбитами). Поэтому

$$(\delta\sigma)^{100} = (5\ 8)^{100}(1\ 4\ 10\ 3\ 7\ 6\ 2\ 9)^{100}.$$

Так как $(5\ 8)^2$ и $(1\ 4\ 10\ 3\ 7\ 6\ 2\ 9)^8$ являются тождественными подстановками, $100 = 12 \cdot 8 + 4$, то

$$(\delta\sigma)^{100} = (1\ 4\ 10\ 3\ 7\ 6\ 2\ 9)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 9 & 7 & 10 & 8 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= (4\ 6)(3\ 9)(2\ 10)(1\ 7).$$

Упражнения

1. Какие из следующих бинарных отношений являются подстановками:
а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Какие из подстановок в предыдущем упражнении равны между собой? Запишите их в каноническом виде, т.е. чтобы верхняя строка была записана в порядке возрастания номеров.

3. Подберите i и j так, чтобы подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 1 & i & 4 & 6 & j & 2 & 9 \end{pmatrix}$ оказалась: а) четной; б) нечетной.

4. Перемножьте подстановки σ и τ. Найдите четность каждой подстановки и четность их произведения. Найдите обратные подстановки к σ и τ и разложите их на непересекающиеся циклы.
а) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Пусть $\sigma, \tau \in S_n$. Подстановка $\tau\sigma\tau^{-1}$ называется подстановкой, *сопряжённой* с подстановкой σ (с помощью подстановки τ). Проверьте, что отношение сопряжённости является отношением эквивалентности. Соответствующее разбиение множества S_n на классы эквивалентных подстановок называется разбиением на классы сопряжённых элементов.

6. Доказать, что подстановки γ, $\sigma \in S_n$ сопряжены тогда и только тогда, когда γ и σ имеют одинаковое цикловое разложение, т.е. одинаковое число циклов каждой длины в своих разложениях в произведение циклов с непересекающимися орбитами.
(Указание:
а) $\tau(\sigma_1\sigma_2)\tau^{-1} = (\tau\sigma_1\tau^{-1})(\tau\sigma_2\tau^{-1})$.
б) Если $\sigma = (i_1, \ldots, i_r)$ *— цикл длины* r, *то* $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i_1), \ldots, \tau(i_r))$*).*

7. Найти разбиение на классы сопряжённых элементов для групп S_3, S_4, A_4, S_5, A_5.

8. Вычислите:
а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}^{11}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{n}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{n}$.

9. Докажите, что для каждой подстановки σ степени n найдется такое целое положительное число $k \leq n!$, что $\sigma^k = e$, где e — тождественная подстановка. Наименьшее натуральное число с этим свойством называется порядком подстановки σ.

10. Вычислите порядок цикла длины k.

11. Вычислите порядок подстановки, если она разложена в произведение попарно независимых циклов длины $k_1, \ldots, k_m$.

12. Пусть $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$ — попарно различные целые числа. Вычислите:
а) $(i_1 i_2)(i_2 i_3) \ldots (i_{k-1} i_k)$;
б) $(1 i_1)(1 i_k) \ldots (1 i_2)(1 i_1)$
в) $(i_1 i_k) \ldots (i_1 i_3)(i_1 i_2)$.

13. Покажите, что каждая подстановка степени $n > 1$:
а) разложима в произведение транспозиций, т. е. циклов длины 2;
б) разложима в произведение транспозиций вида $(1k)$;
в) разложима в произведение транспозиций вида $(kk+1)$.
/Указание: Если $i, j \neq 1$, то $(ij) = (1i)(1j)(1i)$. Группа S_n, $n \geq 3$, порождается транспозицией (12) и циклом $(12 \ldots n)$./

14. Доказать, что всякая четная подстановка может быть представлена как
а) произведение тройных циклов;
б) произведение циклов вида $(123), (124), \ldots, (12n)$.
/Указание: Чётная подстановка может быть представлена в виде произведения чётного числа транспозиций, при различных i, j, k: $(ik)(ij) = (ijk)$; при различных i, j, k, l: $(ij)(kl) = (jkl)(ilj)$./

3. Определители

Рассматривая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

для вычисления x_1 умножим первое уравнение на a_{22}, второе уравнение на $-a_{12}$ и сложим их. Получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Аналогично, для вычисления x_2 умножим первое уравнение на $-a_{21}$, второе уравнение на a_{11} и сложим их. Получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Если мы *определителем* (2×2)-матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

назовём число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

то в этом частном случае мы получим следующее утверждение (правило Крамера для $n = 2$; см. ниже): если определитель квадратной системы отличен от нуля, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

то система является определённой и для её единственного решения справедливы формулы

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Непосредственная проверка показывает, что (x_1, x_2) — решение.

Пусть теперь

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{nn} \\ & \dots\dots & \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K) -$$

квадратная $(n \times n)$-матрица, $a_{ij} \in K$, где K — любое поле (например, $K = \mathbb{R}$).

При $n = 1$: $|a| = a \in K$.

При $n = 2$ мы имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

т. е. определитель (2×2)-матрицы является суммой двух слагаемых, каждое из которых является произведением элементов матрицы, взятых по одному (и только одному) из каждой строки (столбца), при этом знак определяется чётностью соответствующей подстановки индексов:

$$+a_{11}a_{22}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \quad \text{четная подстановка;}$$

$$-a_{12}a_{21}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \quad \text{нечетная подстановка.}$$

С этой «подсказкой» определим определитель квадратной матрицы A как

$$|A| = \sum_{\alpha \in S_n} \epsilon(\alpha) a_{1\alpha(1)} \ldots a_{n\alpha(n)},$$

т.е. как сумму всех произведений элементов матрицы A, взятых по одному (и только одному) из каждой строки и каждого столбца ($a_{1\alpha(1)}$ — из 1-й строки и $\alpha(1)$-го столбца; $\ldots$; $a_{n\alpha(n)}$ — из n-й строки и $\alpha(n)$-го столбца), т.е. тех произведений, индексы которых дают подстановку $\alpha \in S_n$, при этом эти произведения берутся со знаком "+"($\epsilon(\alpha) = 1$), если подстановка α чётная, и со знаком "−"($\epsilon(\alpha) = -1$), если подстановка α нечётная.

Пример 3.1.

Если $n = 3$, $A = (a_{ij}) \in M_3(K)$, то

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Из определения определителя можно вывести следующие его свойства.

1^o. *Если поменять местами две строки определителя (два столбца), то получим новый определитель, равный исходному, умноженному на* (-1).

2^o. *Определитель, имеющий две равных строки (два равных столбца), равен нулю.*

3^o. *Если одну из строк (один из столбцов) определителя умножить на какое-либо число, то получится определитель, равный исходному, умноженному на это число.*

Замена строк матрицы на ее столбцы, а столбцов — на строки называется *транспонированием* матрицы. Так, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то транспонированная с ней матрица

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

4^o. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.*

5^o. *Если в определителе вместо любой строки записать сумму этой строки и любой другой строки, умноженной на некоторое число, то полученный новый определитель будет равен исходному.*

Определение определителя

$$|A| = \sum_{\alpha \in S_n} \epsilon(\alpha) a_{1\alpha(1)} \dots a_{n\alpha(n)},$$

как суммы $n!$ слагаемых-произведений плохо пригодно для реальных вычислений при больших n.

Определение 3.1. *(дополняющие миноры и алгебраические дополнения)* Зафиксируем элемент a_{ij} квадратной $(n \times n)$-матрицы $A = (a_{ij})$. Вычёркивая в определителе $|A|$ i-ю строку и j-й столбец (проходящие через a_{ij}), получаем определитель M_{ij} матрицы порядка $(n-1) \times (n-1)$, называемый (дополняющим) минором элемента a_{ij}. Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема 3.1. *(разложение определителя по i-й строке и по j-му столбцу, $1 \leq i, j \leq n$).*

$$1) \quad |A| = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} \left(= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \right);$$

$$2) \quad |A| = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \left(= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \right);$$

Пример 3.2.

Найти определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

а) По определению,

$$\Delta = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = -18.$$

б) Разлагая по первой строке, получаем

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

в) Используя элементарные преобразования строк, имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix},$$

и мы пришли к треугольному виду. При этом мы применяли только преобразования 1-го типа, не меняющие определитель (свойство 5^o определителя). Следовательно, $\Delta = -18$.

Если M — минор (т. е. определитель матрицы), проходящий через k строк с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и k столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$, $k \geq 1$, то дополнительный минор $\overline{M}$ определяется как определитель, получаемый вычёркиванием строк $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, \ldots, j_k$. Алгебраическое дополнение минора M определяется следующим образом:

$$A(M) = (-1)^{(i_1+\ldots+i_k)+(j_1+\ldots+j_k)}\overline{M}.$$

Теорема 3.2. *(теорема Лапласа.) Если $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $1 \geq k \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_k$ —зафиксированные номера k строк, то определитель $|A|$ равен сумме всех произведений $MA(M)$, где M пробегает все C_n^k миноров, проходящих через строки с номерами $i_1, \ldots, i_k$.*

Частным случаем теоремы Лапласа является теорема о разложении по строке ($k = 1$).

Теорема 3.3. *(правило Крамера.) Для квадратной системы линейных уравнений $(a_{ij}|b_i)$ с $(n \times n)$-матрицей $A = (a_{ij})$ имеем:*
1) система является определённой тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$;
2) в этом случае (т. е. если $|A| \neq 0$) это единственное решение $(k_1, \ldots, k_n)$ имеет следующий вид для $j = 1, \ldots, n$:

$$k_j = \frac{D_j}{D},$$

где

$$D = |A|, \quad D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \mathbf{b_1} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \ldots & \mathbf{b_n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Здесь D_j — определитель n-го порядка, получающийся из определителя D матрицы A коэффициентов системы заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Следствие 3.1. *Если квадратная система линейных уравнений (n уравнений с n неизвестными) не имеет решения, то определитель матрицы её коэффициентов равен нулю.*

Следствие 3.2. *Если квадратная система линейных уравнений (n уравнений с n неизвестными) имеет более чем одно решение, то определитель матрицы её коэффициентов равен нулю.*

Следствие 3.3. *Однородная квадратная система линейных уравнений (n уравнений с n неизвестными) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы её коэффициентов равен нулю.*

Пример 3.3.

Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

Вычислим соответствующие определители:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -17; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -8.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{16}{17}; \quad x_2 = -\frac{3}{17}; \quad x_3 = \frac{8}{17}.$$

Упражнения

1. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение

а) $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.

б) $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

2.

а) Как изменится определитель порядка n, если первый столбец переставить на последнее место, а остальные столбцы передвинуть влево, сохраняя их расположение?

б) Как изменится определитель порядка n, если его строки записать в обратном порядке?

в) Как изменится определитель порядка n, если к последнему столбцу прибавить все остальные?

г) Покажите, что для квадратной матрицы порядка n выполнено $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

3.

а) Разлагая по 3-ей строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

б) разлагая по 2-му столбцу, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определители:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$$

5. Вычислить определители порядка n.

1) приведением к треугольному виду:

$$\text{а)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix};$$

2) методом выделения линейных множителей:

$$\text{а)}\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}; \quad \text{б)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix};$$

3) методом рекуррентных соотношений:

$$\text{а)}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix};$$

4) методом представления определителя в виде суммы определителей:

$$\text{а)}\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}; \ \text{б)}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix};$$

5) используя определитель Вандермонда

$$V(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j\le i\le n}(a_i-a_j):$$

$$\text{а)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_n^2+x_n \\ x_1^3+x_1^2 & x_2^3+x_2^2 & \dots & x_n^3+x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix};$$

б) $$\begin{vmatrix} (x+a_1)^n & (x+a_1)^{n-1} & \ldots & x+a_1 & 1 \\ (x+a_2)^n & (x+a_2)^{n-1} & \ldots & x+a_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ (x+a_{n+1})^n & (x+a_{n+1})^{n-1} & \ldots & x+a_{n+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

6. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

$$\text{а) }\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \qquad \text{б) }\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

7. Следующие системы уравнений решить по правилу Крамера:

$$\text{а) }\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4, \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6, \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12, \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6. \end{cases} \qquad \text{б) }\begin{cases} 2x-5y+3z+t=5, \\ 3x-7y+3z-t=-1, \\ 5x-9y+6z+4t=7, \\ 4x-6y+3z+t=8. \end{cases}$$

4. Алгебра матриц

Через $M_{m,n}(K)$ обозначим совокупность всех прямоугольных матриц над полем K фиксированного размера $m \times n$ (для краткости обозначения, $M_n(K) = M_{n,n}(K)$ — совокупность всех квадратных $(n \times n)$-матриц). Для $M_{m,n}(K)$ определены операции *сложения* матриц

$$C = A + B \qquad (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{для каждого места } (i,j))$$

и *умножения матрицы на число* $c \in K$

$$D = cA \qquad (d_{ij} = ca_{ij} \quad \text{для каждого места } (i,j)).$$

Отметим, что для $M_{m,n}(K)$ непосредственно проверяется выполнение всех аксиом линейного пространства (в частности, нейтральным элементом в $M_{m,n}(K)$ будет нулевая матрица 0 с нулями на всех местах, $-A = (-1) \cdot A$).

Если $A = (a_{ij}) \in M_{r,m}(K)$, $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ то мы определим их *произведение*

$$AB = U = (u_{ij}) \in M_{r,n}(K),$$

полагая

$$u_{is} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{ks}$$

(т. е. элемент матрицы AB, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца получается «умножением» i-й строки (длины m) матрицы A на j-й столбец (длины m) матрицы B). Таким образом, условие возможности перемножить две прямоугольные матрицы A и B заключается в том, что *длина строк левого множителя A совпадает с длиной столбцов правого множителя B.*

Пример 4.1.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -10 & -8 \\ 1 & -5 & -2 \\ 9 & 15 & 22 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Для алгебраических действий над матрицами справедливы следующие законы:

1)$A + B = B + A$;

2)$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

3)$(A + B) + C = A + (B + C)$;

4)$(AB)C = A(BC)$;

5)$A(B + C) = AB + AC$.

Определение 4.1. Пусть $A \in M_n(K)$ — квадратная матрица. Будем говорить, что матрица $B \in M_n(K)$ является *обратной* к A, если $AB = E = BA$, где E — единичная матрица размера $n \times n$.

Теорема 4.1. *(об обратной матрице) Пусть $A \in M_n(K)$ — квадратная $(n \times n)$-матрица. Тогда:*
1) обратная матрица $B = (b_{ij}) = A^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$;
2) в этом случае $b_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{|A|}$ (формула для элемента обратной матрицы);
3) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

Для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

возможна матричная запись $AX = B$, где $A = (a_{ij})$ — (m, n)-матрица коэффициентов,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} —$$

столбец неизвестных,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K) —$$

столбец свободных членов. Таким образом, строка $(k_1, \ldots, k_n)$ является решением системы линейных уравнений, если столбец

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$$

является решением матричного уравнения

$$A \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Вычислить произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ -1 & 4 & -2\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^3$;

з) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}^n$.

2. Найти значение многочлена $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ от матрицы:

а) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

3. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\end{pmatrix}$.

4. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$; б) $X\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

д) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$.

5. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Пусть K — поле, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$Z(M_n(K) = \{A \in M_n(K) | AB = BA \quad \forall B \in M_n(K).$$

Тогда $A \in Z(M_n(K)$ в том и только том случае, если $A = \lambda E_n$, $\lambda \in K$.

7. Покажите, что любые две матрицы в $M_2(\mathbb{Z})$, коммутирующие с $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, коммутируют между собой.

8. Пусть $A \in M_n(K)$. Покажите, что

$$\{B \in M_n(K) | AB = BA\} \quad —$$

подалгебра в алгебре матриц $M_n(K)$.

9. Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Положим

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

(след матрицы A). Тогда:

а) tr — линейная функция,

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B), \quad tr(-A) = -tr(A)$$

для всех $A, B \in M_n(K)$ и $\lambda \in K$;

б) $tr(E) = n$;

в) $tr(AB) = tr(BA)$;

г) Функция $tr : M_n(K) \to K$ однозначно определяется свойствами а), б) и в).

д) Если $char K = 0$ (например, $K = \mathbb{R}$), то в алгебре матриц $M_n(K)$ единичная матрица E не представима в виде $AB - BA$ для $A, B \in M_n(K)$.

10. Пусть

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$$

и

$$f(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc =$$
$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$
$$(= \lambda^2 - trA\lambda + |A|) \quad -$$

характеристический многочлен матрицы A (здесь $trA = a + d$). Тогда $f(A) = 0$ (т.е. в этом частном случае мы видим, что справедлива теорема Гамильтона-Кэли о том, что матрица A является корнем своего характеристического многочлена $f(\lambda) = |A - \lambda E|$ для (2×2)-матриц).

Замечание. Очевидное равенство $|A - AE| = 0 \in K$ не является доказательством теоремы Гамильтона—Кэли.

11. Найти

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{-1} \in M_n(\mathbb{Q})$$

(матрица размера $n \times n$, на главной диагонали которой стоят нули, а все остальные элементы равны 1).

12. Показать, что операция транспонирования матрицы обладает свойствами:

а) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

б) $(AB)^t = B^t A^t$;

в) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

13. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка называется *ортогональной*, если $AA^t = E$, где E — единичная матрица. Доказать, что определитель ортогональной матрицы равен ± 1.

14. Пусть A — ненулевая квадратная матрица над полем K. Покажите, что любая матрица того же порядка над тем же полем может быть представлена как линейная комбинация матриц вида $E_{ij} A E_{kl}$, где E_{sk} — матрица, в которой на пересечении s-й строки и k-го столбца стоит 1, а на всех остальных местах стоит 0.

5. Линейная зависимость в линейных пространствах

Определение 5.1. Пусть V_K — линейное пространство над полем K. Система элементов $v_1, \dots, v_r \in V_K$ назовается *линейно зависимой*, если найдутся элементы $k_1, \dots, k_r \in K$ такие, что

а) не все k_i равны нулю (т. е. хотя бы один элемент k_i отличен от нуля);

б) $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r = 0$.

Система элементов $v_1, \dots, v_r \in V_K$ называется *линейно независимой*, если она не является линейно зависимой, это означает, что из равенства $k_1v_1 + \ldots + k_rv_r = 0$, $k_1, \dots, k_r \in K$, следует, что $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$.

Пусть K — поле (например, $K = \mathbb{R}$ — поле действительных чисел). Рассмотрим $K^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) | \alpha_i \in K\}$ — совокупность всех упорядоченных строк $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ длины n элементов α_i, $i = 1, \dots, n$, поля K. На множестве K^n определены следующие операции.

1) *Сложение строк* (бинарная операция): если

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in K_n,$$

то

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n).$$

2) Для каждого элемента $\lambda \in K$ (унарная) операция *умножение строк на элемент* $\lambda \in K$: если

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

то

$$\lambda\alpha = (\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n).$$

Теорема 5.1. *Множество K^n строк длины n элементов поля K с операцией сложения и с операциями умножения на элементы λ поля K является линейным пространством над полем K.*

Аналогично вводится линейное пространство столбцов $\hat{K}^n$ над полем K.

Система строк $\epsilon_1, ..., \epsilon_n \in K^n$, где

$$\epsilon_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\epsilon_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

$$\dots$$

$$\epsilon_n = (0, 0, \dots, 1),$$

линейно независима. Кроме того, любая строка $\alpha = (k_1, \dots, k_n) \in K^n$ является линейной комбинацией элементов $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, а именно, $\alpha = (k_1, \dots, k_n) = k_1\epsilon_1 + \ldots + k_n\epsilon_n$. Для системы строк в K^n

$$\alpha_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}),$$

$$\dots$$

$$\alpha_r = (a_{r1}, \dots, a_{rn})$$

вопрос о её линейной зависимости равносилен существованию ненулевого решения $(k_1, \dots, k_r)$ следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + \ldots + a_{rn}x_r = 0 \end{cases}$$

с транспонированной матрицей A^t, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}.$$

Таким образом, метод Гаусса даёт нам в этом случае алгоритмическое решение задачи о линейной зависимости строк.

Пусть S — система векторов линейного пространства V_K. Подсистема $v_1, \dots, v_r \in S$ называется *максимальной линейно независимой подсистемой* в S, если:

1) $v_1, \dots, v_r$ — линейно независимая система;

2) $v_1, \dots, v_r, v$ — линейно зависимая система для всякого $v \in S$, или, что эквивалентно,

2') любой элемент $v \in S$ является линейной комбинацией элементов $v_1, \dots, v_r$.

Максимальная линейно независимая подсистема $v_1, \dots, v_r$ в $S = V_K$ (если в V_K существует такая конечная система) называется *базисом* линейного пространства V_K. Линейное пространство V_K с конечным базисом $v_1, \dots, v_r$ называется *конечномерным* линейным пространством (при этом любой другой базис линейного пространства содержит то же самое число элементов).

Теорема 5.2. *Для системы $S \subseteq V_K$, где V_K — конечномерное линейное пространство, любые две (конечные) максимальные линейно независимые подсистемы содержат одинаковое число элементов $r(S)$, называемое рангом системы S.*

Пусть $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ — прямоугольная $(m \times n)$-матрица с элементами a_{ij} из поля K. Определитель $M_{i1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_k}$ квадратной $(k \times k)$-матрицы, состоящей из элементов на пересечении k строк с номерами $i_1, \dots, i_k$ и k столбцов с номерами $j_1, \dots, j_k$, называется минором k-го порядка матрицы A. Наивысший порядок ненулевого минора матрицы A обозначим через $r(A)$.

Теорема 5.3. *(о ранге матрицы). Следующие четыре числовые характеристики матрицы $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ совпадают:*

1) $r(A_1, \dots, A_m)$ (ранг системы строк, в K^n);

2) $r(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n)$ (ранг системы столбцов, в $\hat{K}^n$);

3) $r(A)$ (наивысший порядок ненулевого минора);

4) число ненулевых строк r в ступенчатом виде $\overline{A}$ матрицы A. (Это совпадающее число называется рангом матрицы A и обозначается через $r(A)$).

Ненулевая матрица $A \in M_{m,n}(K)$ имеет *главный ступенчатый вид*, если матрица A имеет ступенчатый вид, все лидеры ненулевых строк $a_{1s_1}, a_{2s_2}, \ldots, a_{rs_r}$ $(1 \le s_1 < \ldots < s_r \le n)$ равны 1 и для каждого j, $1 \le j \le r$, в s_j-м столбце матрицы A единственный ненулевой элемент — это $a_{js_j} = 1$. Например, матрица

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет главный ступенчатый вид, а матрица

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ступенчатый вид (выделены лидеры строк), но не главный ступенчатый вид. Любая ненулевая матрица $A \in M_{m,n}(K)$ с помощью элементарных преобразований строк 1-го, и 2-го типа (см. определения 1.1 и 1.2) может быть приведена к главному ступенчатому виду.

Пример 5.1.

Найти какую-либо максимальную линейно независимую подсистему строк в системе $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R^4$,

$$a_1 = (-1, 4, -3, -2), \quad a_2 = (3, -7, 5, 3),$$

$$a_3 = (3, -2, 1, 0), \quad a_4 = (-4, 1, 0, 1),$$

а остальные строки выразить как линейные комбинации строк этой подсистемы.

Записываем строки a_1, a_2, a_3, a_4 как столбцы и приводим полученную матрицу к главному ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \\ 0 & -4 & -8 & 12 \\ 0 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Записываем номера столбцов в ступенчатом виде, проходящие через уголки ступенек: 1, 2. Поэтому $\{a_1, a_2\}$ — максимальная линейно независимая подсистема, $a_3 = 3a_1 + 2a_2, a_4 = -5a_1 - 3a_2$; ранг системы строк a_1, a_2, a_3, a_4 равен 2.

Теорема 5.4. *(теорема Кронекера—Капелли: критерий совместности и определённости системы линейных уравнений в терминах рангов матриц).*

Пусть $(a_{ij}|b_i)$ *— система* m *линейных уравнений с* n *неизвестными,* $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ *— матрица коэффициентов,*

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} -$$

расширенная матрица системы линейных уравнений.

а) Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов A *равен рангу расширенной матрицы* $A' = (A, \hat{b})$, $r(A) = r(A')$.

б) Система линейных уравнений определённая тогда и только тогда, когда $r(A) = r(A') = n$.

Отметим теперь, что совокупность решений X однородной системы линейных уравнений (ОСЛУ) с матрицей $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ является линейным пространством, подпространством в K^n.

Теорема 5.5. *Если* $r = r(A) < n$, *то* $dim X = n - r$ *(т.е. размерность пространства решений равна числу свободных неизвестных). Таким образом, если* $r(A) = n$, *то система линейных уравнений имеет лишь нулевое решение.*

Любой базис линейного пространства решений X однородной системы линейных уравнений называется в ряде алгебраических текстов «фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений (ФСР)».

Пример 5.2.

Найти общее решение и ФСР однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

Приведем систему к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса. Для этого записываем матрицу системы (в данном случае, так как система однородная, то ее правые части равны нулю, в этом случае столбец свободных коэффициентов можно не выписывать, так как при любых элементарных преобразованиях в правых частях будут получаться нули):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

и с помощью элементарных преобразований приводим данную матрицу к ступенчатому виду.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

По полученной ступенчатой матрице выпишем ОСЛУ и разобьём переменные на две группы: главные x_1, x_2, x_4, «проходящие» через уголки ступенек, и свободные x_3, x_5. Таким образом, размерность пространства решений ОСЛУ равна двум.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Выразим x_1, x_2, x_4 через x_3 и x_5:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + \frac{7}{6}x_5 \\ x_2 = x_3 + \frac{5}{6}x_5 \\ x_4 = \frac{1}{3}x_5 \end{cases}$$

Таким образом, множество решений имеет вид

$$X = \left\{ (-x_3 + \frac{7}{6}x_5, x_3 + \frac{5}{6}x_5, x_3, \frac{1}{3}x_5, x_5) | x_3, x_5 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Далее свободным переменным придаются любые, одновременно не равные нулю значений и из зависимости между свободными и главными переменными находятся значения остальных переменных. Придавая в первом случае, например, независимым переменным значения $x_3 = 0, x_5 = 6$, получим первый вектор из ФСР: $a_1 = (7, 5, 0, 2, 6)$. Далее, если $x_3 = 1, x_5 = 0$, то $a_2 = (-1, 1, 1, 0, 0)$. Эти два вектора образуют один из базисов пространства решений X заданной ОСЛУ.

Упражнения

1. Найти ранг следующих матриц с помощью окаймления миноров и элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Найти значения λ, при которых матрица

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при найденных λ и чему он равен при других значениях λ?

3. Чему равен ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

при различных значениях λ?

4. Найти вектор x из уравнения

а)

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = 0,$$

где $a_1 = (5, -8, -1, 2)$, $a_2 = (2, -1, 4, -3)$, $a_3 = (-3, 2, -5, 4)$.

б)

$$3(a_1 - x) + 2(a_2 + x) = 5(a_3 + x),$$

где $a_1 = (2, 5, 1, 3)$, $a_2 = (10, 1, 5, 10)$, $a_3 = (4, 1, -1, 1)$.

5. Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми или линейно независимыми:

а)

$$a_1 = (2, -3, 1),$$
$$a_2 = (3, -1, 5),$$
$$a_3 = (1, -4, 3).$$

б)

$$a_1 = (4, -5, 2, 6),$$
$$a_2 = (2, -2, 1, 3),$$
$$a_3 = (6, -3, 3, 9),$$
$$a_4 = (4, -1, 5, 6).$$

6. Найти все значения λ, при которых вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, \dots, a_s$:

а)

$$a_1 = (2, 3, 5),$$
$$a_2 = (3, 7, 8),$$
$$a_3 = (1, -6, 1),$$
$$b = (7, -2, \lambda).$$

б)

$$a_1 = (4, 4, 3),$$
$$a_2 = (7, 2, 1),$$

$$a_3 = (4, 1, 6);$$

$$b = (5, 9, \lambda).$$

7. Найти какой-нибудь базис системы векторов и выразить через этот базис остальные векторы системы:

а) $a_1 = (5, 2, -3, 1)$, $a_2 = (4, 1, -2, 3)$, $a_3 = (1, 1, -1, -2)$, $a_4 = (3, 4, -1, 2)$, $a_5 = (7, -6, -7, 0)$.

б) $a_1 = (2, -1, 3, 5)$, $a_2 = (4, -3, 1, 3)$, $a_3 = (3, -2, 3, 4)$, $a_4 = (4, -1, -15, 7)$.

8. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений:

а)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

9. Найти системы линейных уравнений, задающие линейные подпространства, натянутые на следующие системы векторов:

а) $a_1 = (1, -1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0, 1)$, $a_3 = (2, 0, 1, 1)$.

б) $a_1 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0, 0, 3)$, $a_3 = (3, 1, 1, -1, 7)$, $a_4 = (0, 2, -1, 1, 2)$.

10. С помощью теоремы Кронекера—Капелли исследовать системы линейных уравнений на совместность и определенность:

а)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

6. Литература

[1] Михалев А.А., Михалев А.В. Начала алгебры, часть I. — М.: Интернет-Ун-т Информ. Технологий, 2005. — 144 с.
[2] Курош А.Г., Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1975. — 432 с.
[3] Кострикин А.И., Введение в алгебру. Ч.I, II. Основы алгебры. — М.: Физматлит, 2000. — 272 с.
[4] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.- изд. 3-е, испр.,дополн. — М.: Наука, 1967. — 384 с.
[5] Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. — М.: Просвещение, 1993. — 288 с.
[6] Сборник задач по алгебре: Учебн. пособие / Под ред. А.И. Кострикина. — М.: Факториал, 1995. — 454 с.

Михаил Иванович **Кузнецов**
Олег Владимирович **Любимцев**
Ольга Александровна **Муляр**

Начала линейной алгебры. Часть 1

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23